数理漢文学への道(2)　基本データ集

【記号法】

整数列$\{a_n\}$を$\{a(n)\}$とも書く．$\{a(n)\}$に対して$a(0*n-1)=a_0a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-1}a_0$と書く．
以下のすべての漢文数列でn＝0およびn＝1のときの値を1とする（$a(0)=a(1)=1$）．
漢文数列は竪点（たててん，ハイフン）の個数m（0≦m≦n－2）で分類する．再読を認めない数列を$\{k^m(n)\}$とし，再読を認める数列を$\{p^m(n)\}$とする．とくに$\{k^0(n)\}$を$\{c_n\}$，$\{k^{n-2}(n)\}$を$\{k_n\}$，$\{p^0(n)\}$を$\{d_n\}$，$\{p^{n-2}(n)\}$を$\{p_n\}$とも書く．

（追加）

$\{k^4(n)\}$　$(n+1)k^4(n)=3(n-1)k^4(n-1)+(5n-7)k^4(n-2)+7(n-2)k^4(n-3)+(8n-19)k^4(n-4)+9(n-2)k^4(n-5)+2(n+4)k^4(n-6)-2(2n-25)k^4(n-7)-9(n-10)k^4(n-8)-12(n-10)k^4(n-9)-(13n-134)k^4(n-10)-10(n-11)k^4(n-11)-6(n-12)k^4(n-12)-3(n-13)k^4(n-13)-(n-14)k^4(n-14)$

$\{p^4(n)\}$　$2(n+1)p^4(n)=(11n-7)p^4(n-1)+(7n-8)p^4(n-2)+6(n-1)p^4(n-3)+4(n+1)p^4(n-4)+2(n+13)p^4(n-5)-12(n-8)p^4(n-6)-2(8n-67)p^4(n-7)-18(n-9)p^4(n-8)-6(3n-29)p^4(n-9)-4(4n-41)p^4(n-10)+10(n-11)p^4(n-11)-6(n-12)p^4(n-12)-3(n-13)p^4(n-13)-(n-14)p^4(n-14)$

【定義】

$\{k^0(n)\}$	$k^0(n) = k^0(0*n-1)$
$\{k^1(n)\}$	$k^1(n) = k^1(0*n-1) + k^1(0*n-2) - k^1(n-2)$
$\{k^2(n)\}$	$k^2(n) = k^2(0*n-1) + k^2(0*n-2) - k^2(n-2) + k^2(0*n-3) - k^2(n-3)$
$\{k^3(n)\}$	$k^3(n) = k^3(0*n-1) + k^3(0*n-2) - k^3(n-2) + k^3(0*n-3) - k^3(n-3) + k^3(0*n-4) - k^3(n-4)$
$\{k^m(n)\}$	$k^m(n) = k^m(0*n-1) + k^m(0*n-2) - k^m(n-2) + k^m(0*n-3) - k^m(n-3) + \cdots + k^m(0*n-m-1) - k^m(n-m-1)$
$\{k_n\}$	$k_n = k(0*n-1) + k(0*n-2) - k_{n-2} + k(0*n-3) - k_{n-3} + \cdots + k(0*1) - k_1 = k_{n-1} - k_{n-2} + k(0*n-1)$
$\{p^0(n)\}$	$p^0(n) = 2\,p^0(0*n-1) - \ p^0(n-1)$
$\{p^1(n)\}$	$p^1(n) = 2\,p^1(0*n-1) - \ p^1(n-1) + p^1(0*n-2) - \ p^1(n-2)$
$\{p^2(n)\}$	$p^2(n) = 2\,p^2(0*n-1) - \ p^2(n-1) + p^2(0*n-2) - \ p^2(n-2) + p^2(0*n-3) - p^2(n-3)$
$\{p^3(n)\}$	$p^3(n) = 2\,p^3(0*n-1) - \ p^3(n-1) + p^3(0*n-2) - \ p^3(n-2) + p^3(0*n-3) - p^3(n-3) + p^3(0*n-4) - p^3(n-4)$
$\{p^m(n)\}$	$p^m(n) = 2p^m(0*n-1) - p^m(n-1) + p^m(0*n-2) - p^m(n-2) + \cdots + p^m(0*n-m-1) - p^m(n-m-1)$
$\{p_n\}$	$p_n = 2p(0*n-1) - p_{n-1} + p(0*n-2) - p_{n-2} + \cdots + p(0*1) - p_1 = 2p(0*n-1) - p(0*n-2)$

【母関数の関数方程式】

$\{k^0(n)\}$	$x{K_0}^2 - K_0 + 1 = 0$
$\{k^1(n)\}$	$x(1+x){K_1}^2 - (1+x^2)K_1 + 1 = 0$
$\{k^2(n)\}$	$x(1+x+x^2){K_2}^2 - (1+x^2+x^3)K_2 + 1 = 0$
$\{k^3(n)\}$	$x(1+x+x^2+x^3){K_3}^2 - (1+x^2+x^3+x^4)K_3 + 1 = 0$
$\{k^m(n)\}$	$x(1+x+x^2+\cdots+x^m){K_m}^2 - (1+x^2+x^3+\cdots+x^{m+1})K_m + 1 = \dfrac{x(1-x^{m+1})}{1-x}{K_m}^2 - \left(\dfrac{1-x^{m+2}}{1-x} - x\right)K_m + 1 = 0$
$\{k_n\}$	$xK^2 - (1-x+x^2)K + 1 - x = 0$
$\{p^0(n)\}$	$2x{P_0}^2 - (1+x)P_0 + 1 = 0$
$\{p^1(n)\}$	$x(2+x){P_1}^2 - (1+x+x^2)P_1 + 1 = 0$
$\{p^2(n)\}$	$x(2+x+x^2){P_2}^2 - (1+x+x^2+x^3)P_2 + 1 = 0$
$\{p^3(n)\}$	$x(2+x+x^2+x^3){P_3}^2 - (1+x+x^2+x^3+x^4)P_3 + 1 = 0$
$\{p^m(n)\}$	$x(2+x+x^2+\cdots+x^m){P_m}^2 - (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{m+1})P_m + 1 = x\left(1+\dfrac{1-x^{m+2}}{1-x}\right){P_m}^2 - \dfrac{1-x^{m+2}}{1-x}P_m + 1 = 0$
$\{p_n\}$	$x(2-x)P^2 - P + 1 - x = 0$

【線形微分方程式】

$\{k^0(n)\}$	$(1-2x)K_0+x(1-4x){K_0}'-1=0$
$\{k^1(n)\}$	$(1-6x^2-2x^3-x^4)K_1+x(1-3x-6x^2-2x^3+x^4+x^5){K_1}'-1-2x+3x^2+2x^3=0$
$\{k^2(n)\}$	$(1-3x^2-11x^3-6x^4-6x^5-2x^6)K_2+x(1-3x-5x^2-8x^3-3x^4+x^5+4x^6+3x^7+x^8){K_2}'-1-2x+7x^3+5x^4+3x^5=0$
$\{k^3(n)\}$	$(1-3x-3x^2+2x^3+3x^4+42x^5+23x^6+30x^7+24x^8+9x^9)K_3$ $+x(1-6x+4x^2+8x^3+12x^4+24x^5+11x^6-10x^8-18x^9-15x^{10}-8x^{11}-3x^{12}){K_3}'-1+x+6x^2+3x^3+3x^4-27x^5$ $-20x^6-17x^7-12x^8=0$
$\{k_n\}$	$(1-3x+x^3-x^4)K+x(1-6x+7x^2-2x^3+x^4)K'-1+x+3x^2-2x^3=0$
$\{p^0(n)\}$	$(1-3x)P_0+x(1-6x+x^2){P_0}'-2+x=0$
$\{p^1(n)\}$	$(2-4x-9x^2-3x^3-x^4)P_1+x(2-11x-8x^2+3x^3+4x^4+x^5){P_1}'-2+6x^2+2x^3=0$
$\{p^2(n)\}$	$2(1-2x-3x^2-8x^3-4x^4-3x^5-x^6)P_2+x(2-11x-7x^2-7x^3+5x^4+7x^5+7x^6+3x^7+x^8){P_2}'-2+3x^2+11x^3+5x^4$ $+3x^5=0$
$\{p^3(n)\}$	$(2-4x-6x^2-12x^3-25x^4-15x^5-13x^6-9x^7-3x^8)P_3$ $+x(2-11x-7x^2-6x^3-5x^4+8x^5+11x^6+12x^7+11x^8+6x^9+3x^{10}+x^{11}){P_3}'-2+3x^2+7x^3+17x^4+9x^5+7x^6+4x^7$ $=0$
$\{p_n\}$	$2(1-5x+6x^2-4x^3+x^4)P+x(2-17x+32x^2-20x^3+4x^5)P'-2+6x-3x^2=0$

【線形差分方程式】

$\{k^0(n)\}$	$(n+1)k^0(n) = 2(2n-1)k^0(n-1)$
$\{k^1(n)\}$	$(n+1)k^1(n) = 3(n-1)k^1(n-1) + 6(n-1)k^1(n-2) + 2(n-2)k^1(n-3) - (n-5)k^1(n-4) - (n-5)k^1(n-5)$
$\{k^2(n)\}$	$(n+1)k^2(n)$ $= 3(n-1)k^2(n-1) + (5n-7)k^2(n-2) + (8n-13)k^2(n-3) + 3(n-2)k^2(n-4) - (n-11)k^2(n-5) - 2(2n-13)k^2(n-6)$ $- 3(n-7)k^2(n-7) - (n-8)k^2(n-8)$
$\{k^3(n)\}$	$(n+1)k^3(n)$ $= 3(2n-1)k^3(n-1) - (4n-11)k^3(n-2) - 2(4n-11)k^3(n-3) - 3(4n-15)k^3(n-4) - 6(4n-13)k^3(n-5)$ $- (11n-43)k^3(n-6) - 30k^3(n-7) + 2(5n-52)k^3(n-8) + 9(2n-19)k^3(n-9) + 15(n-10)k^3(n-10)$ $+ 8(n-11)k^3(n-11) + 3(n-12)k^3(n-12)$
$\{k_n\}$	$(n+1)k_n = 3(2n-1)k_{n-1} - 7(n-2)k_{n-2} + (2n-7)k_{n-3} - (n-5)k_{n-4}$
$\{p^0(n)\}$	$(n+1)p^0(n) = 3(2n-1)p^0(n-1) - (n-2)p^0(n-2)$
$\{p^1(n)\}$	$2(n+1)p^1(n) = (11n-7)p^1(n-1) + (8n-7)p^1(n-2) - 3(n-4)p^1(n-3) - (4n-17)p^1(n-4) - (n-5)p^1(n-5)$
$\{p^2(n)\}$	$2(n+1)p^2(n)$ $= (11n-7)p^2(n-1) + (7n-8)p^2(n-2) + (7n-5)p^2(n-3) - (5n-28)p^2(n-4) - (7n-41)p^2(n-5) - (7n-44)p^2(n-6)$ $- 3(n-7)p^2(n-7) - (n-8)p^2(n-8)$
$\{p^3(n)\}$	$2(n+1)p^3(n)$ $= (11n-7)p^3(n-1) + (7n-8)p^3(n-2) + 6(n-1)p^3(n-3) + 5(n+1)p^3(n-4) - (8n-55)p^3(n-5) - (11n-79)p^3(n-6)$ $- 3(4n-31)p^3(n-7) - (11n-91)p^3(n-8) - 6(n-9)p^3(n-9) - 3(n-10)p^3(n-10) - (n-11)p^3(n-11)$
$\{p_n\}$	$2(n+1)p_n = (17n-7)p_{n-1} - 4(8n-13)p_{n-2} + 4(5n-13)p_{n-3} - 2(2n-7)p_{n-4}$

【項比の極限 r と母関数の収束半径 s=1/r の方程式】

$\{k^0(n)\}$	$r-4=0$	$1-4s=0$
$\{k^1(n)\}$	$(r+1)(r^4-4r^3-2r^2+1)=0$	$(1+s)\{(1+s^2)^2-4s(1+s)\}=0$
$\{k^2(n)\}$	$(r^2+r+1)(r^6-4r^5-2r^4-2r^3+r^2+2r+1)=0$	$(1+s+s^2)\{(1+s^2+s^3)^2-4s(1+s+s^2)\}=0$
$\{k^3(n)\}$	$(r^3+r^2+r+1)(r^9-7r^8+10r^7+4r^6+5r^5+5r^4-3r^3-7r^2$ $-5r-3)=0$	$(1+s+s^2+s^3)\{(1+s^2+s^3+s^4)^2-4s(1+s+s^2+s^3)\}$ $=0$
$\{k^m(n)\}$		$(1+s+\cdots+s^m)\{(1+s^2+\cdots+s^{m+1})^2-4s(1+s+\cdots+s^m)\}$ $=\frac{1-s^{m+1}}{1-s}\left\{\left(\frac{1-s^{m+2}}{1-s}-s\right)^2-\frac{4s(1-s^{m+1})}{1-s}\right\}=0$
$\{k_n\}$	$r^4-6r^3+7r^2-2r+1=0$	$(1-s+s^2)^2-4s(1-s)=0$
$\{p^0(n)\}$	$r^2-6r+1=0$	$(1+s)^2-4\cdot 2s=0$
$\{p^1(n)\}$	$(2r+1)(r^4-6r^3-r^2+2r+1)=0$	$(2+s)\{(1+s+s^2)^2-4(2s+s^2)\}=0$
$\{p^2(n)\}$	$2r^8-11r^7-7r^6-7r^5+5r^4+7r^3+7r^2+3r+1=0$	$(2+s+s^2)\{(1+s+s^2+s^3)^2-4(2s+s^2+s^3)\}=0$
$\{p^3(n)\}$	$2r^{11}-11r^{10}-7r^9-6r^8-5r^7+8r^6+11r^5+12r^4+11r^3+6r^2$ $+3r+1=0$	$(2+s+s^2+s^3)\{(1+s+s^2+s^3+s^4)^2$ $-4(2s+s^2+s^3+s^4)\}=0$
$\{p^m(n)\}$		$(2+s+s^2+\cdots+s^m)\{(1+s+\cdots+s^{m+1})^2$ $-4(2s+s^2+s^3+\cdots+s^{m+1})\}$ $=\left(1+\frac{1-s^{m+1}}{1-s}\right)\left\{\left(\frac{1-s^{m+2}}{1-s}\right)^2-4s\left(1+\frac{1-s^{m+2}}{1-s}\right)\right\}=0$
$\{p_n\}$	$(2r-1)(r^3-8r^2+12r-4)=0$	$(2-s)\{1-4(2s-s^2)(1-s)\}=0$

【数列k^m】

$k^m(n)$を n 字の漢字列に対する竪点 m 個（$0 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{n}-2$）までの使用を認めるカッコ表示の個数とし，ここではk^mと略記する．

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c_n k^0	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786
k^1				6	19	64	225	816	3031	11473	44096	171631
k^2					20	69	248	919	3485	13461	52778	209513
k^3						70	253	942	3589	13925	54834	218598
k^4							254	947	3612	14029	55299	220664
k^5	⋮	⋮	⋮					948	3617	14052	55403	221129
k^6				⋮					3618	14057	55426	221233
k^7					⋮	⋮				14058	55431	221256
k^8							⋮	⋮			55432	221261
k^9									⋮	⋮		221262
⋮											⋮	⋮
k^{n-2}	1	1	$k^0(2)$	$k^1(3)$	$k^2(4)$	$k^3(5)$	$k^4(6)$	$k^5(7)$	$k^6(8)$	$k^7(9)$	$k^8(10)$	$k^9(11)$
k_n	1	1	2	6	20	70	254	948	3618	14058	55432	221262

一般に，あるnに対して，次の式が成り立つ．

$k^{n-2}(n) - k^{n-3}(n) = 1 \quad (n \geq 3)$

$k^{n-3}(n) - k^{n-4}(n) = 5 \quad (n \geq 4)$

$k^{n-4}(n) - k^{n-5}(n) = 23 \quad (n \geq 6)$

$k^{n-5}(n) - k^{n-6}(n) = 104 \quad (n \geq 8)$

$k^{n-6}(n) - k^{n-7}(n) = 465 \quad (n \geq 10)$

【数列p^m】

$p^m(n)$を n 字の漢字列に対する竪点 m 個（$0 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{n}-2$）までの使用と，再読を認めるカッコ表示の個数とし，ここではp^mと略記する．

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_n p^0	1	1	3	11	45	197	903	4279	20793	103049	518859	2649723
p^1				12	52	240	1157	5759	29374	152731	806551	4314114
p^2					53	247	1201	6026	30972	162245	863096	4650128
p^3						248	1208	6070	31240	163856	872729	4707626
p^4							1209	6077	31284	164124	874341	4717272
p^5	⋮	⋮	⋮					6078	31291	164168	874609	4718884
p^6				⋮					31292	164175	874653	4719152
p^7					⋮	⋮				164176	874660	4719196
p^8							⋮	⋮			874661	4719203
p^9									⋮	⋮		4719204
⋮											⋮	⋮
p^{n-2}	1	1	$p^0(2)$	$p^1(3)$	$p^2(4)$	$p^3(5)$	$p^4(6)$	$p^5(7)$	$p^6(8)$	$p^7(9)$	$p^8(10)$	$p^9(11)$
p_n	1	1	3	12	53	248	1209	6078	31292	164176	874661	4719204

一般に，あるnに対して，次の式が成り立つ．

$p^{n-2}(n) - p^{n-3}(n) = 1 \quad (n \geq 3)$

$p^{n-3}(n) - p^{n-4}(n) = 7 \quad (n \geq 4)$

$p^{n-4}(n) - p^{n-5}(n) = 44 \quad (n \geq 6)$

$p^{n-5}(n) - p^{n-6}(n) = 268 \ (n \geq 8)$

$p^{n-6}(n) - p^{n-7}(n) = 1612 \ (n \geq 10)$